Проширени Чангов модел као модел за аксиому предодређености

Обрад Касум

11. јун 2026.

Нотација 1. $\mathbb{I}$ означава Беров простор ω^ω. $\square$

Нотација 2. Нека су A и B подскупови Беровог простора.

- Важи $A \leqslant^*_{\mathrm{W}} B$ акко је A инверзна слика скупа B или скупа $B^{\complement}$ непрекидном функцијом.
- Важи $A <^*_{\mathrm{W}} B$ акко је $A \leqslant^*_{\mathrm{W}} B$, али није $B \leqslant^*_{\mathrm{W}} A$.
- Аутодуална Веџова колекција је колекција $\Delta \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{I})$ таква да је
$$(\forall X \in \Delta)(\forall Y \in \mathscr{P}(\mathbb{I}))(Y \leqslant^*_{\mathrm{W}} X \implies Y \in \Delta).$$
- Колекција $\Gamma \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{I})$ је конструктибилно затворена ако важи $L(\mathbb{I}, \Gamma) \cap \mathscr{P}(\mathbb{I}) = \Gamma$. $\square$

Напомена 3. Свака конструктибилно затворена колекција је аутодуална Веџова колекција. $\square$

Дефиниција 4. Модел предодређености је било који унутрашњи модел M који задовољава $\mathbb{I} \subseteq M$ и $M \vDash \mathrm{AD}^+$. $\square$

Дефиниција 5. Нека је M модел предодређености. Тада Δ_M означава колекцију $\mathscr{P}(\mathbb{I}) \cap M$. $\square$

Став 6. *Нека је Γ конструктибилно затворена колекција. Тада је $L(\Gamma)$ модел предодређености и $\Delta_{L(\Gamma)} = \Gamma$.* $\square$

Став 7. *Нека је M модел предодређености. Тада је Δ_M конструктибилно затворена колекција и $L(\Delta_M)$ је модел предодређености.* $\square$

Нотација 8. За дато X, симбол μ_X означава филтер затворених неограничених подскупова простора $[X]^\omega$. $\square$

Теорема 9 (Суштински Ниман). *Претпоставимо $\mathrm{ZFC}+\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$. Тада за свако $\eta < \Theta^{L(\mathbb{R})}$ важи да филтер $\mu_\eta \cap L(\mathbb{R})$ припада $L(\mathbb{R})$ и да је он суперкомпактна мера на $[\eta]^\omega$ у том моделу.* $\square$

Дефиниција 10. Нека је M модел предодређености. Тада дефинишемо ∂M да буде следећи модел предодређености:

$$L\left(\bigcup_{\eta<\Theta^M}\eta^\omega\right)\left[\left(\mu_\eta\ :\ \eta<\Theta^M\right)\right].$$

$\square$

Последица 11. *Претпоставимо* ZFC + $\mathrm{AD}^{L(\mathbb{R})}$. *Тада је* $\partial L(\mathbb{R}) = L(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема 12 (Суштински Соловеј). *Нека је M модел предодређености који задовољава* $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$. *Тада је ∂M модел предодређености и $\partial M \subseteq L(\Delta_M)$.* $\square$

Претпоставка 13. *Нека је M модел предодређености. Тада важи $\partial M = L(\Delta_M)$.* $\square$

Теорема 14 (Многи математичари). *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала који су лимеси Вудинових кардинала.*

а) Универзално Берови скупови чине аутодуалну Вецову колекцију.

б) Релација $\leqslant^*_{\mathrm{W}}$ је добро предуређење колекције универзално Берових скупова.

в) Нека је Δ конструктибилно затворена колекција и нека је A универзално Беров скуп такав да је

$$(\forall X\in\Delta)(X<^*_{\mathrm{W}} A).$$

Онда је $L(\Delta)$ модел предодређености.

г) За сваки универзално Беров скуп A, постоји конструктибилно затворена колекција Δ универзално Берових скупова која саржи A и задовољава $L(\Delta)\vDash \mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$. $\square$

Дефиниција 15. Проширени Чангов модел, означен са CM^+, јесте унутрашњи модел

$$L\left(\mathrm{Ord}^\omega\right)\left[\left(\mu_{\eta^\omega}\ :\ \eta<\mathrm{Ord}\right)\right].$$

$\square$

Теорема 16 (Вудин). *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала који су лимеси Вудинових кардинала. Тада:*

а) постоји универзално Беров скуп A такав да

$$(\forall X\in\Delta_{\mathrm{CM}^+})(X<^*_{\mathrm{W}} A);$$

б) за свако $a\in\mathrm{CM}^+$, филтер $\mu_a\cap\mathrm{CM}^+$ припада моделу проширеном Ченоговом моделу и он је у том моделу суперкомпактна мера. $\square$

Последица 17. *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала који су лимеси Вудинових кардинала. Нека је M произвољан модел предодређености. Тада важи $\partial M\subseteq \mathrm{CM}^+$.* $\square$

Последица 18. *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала који су лимеси Вудинових кардинала. Тада постоји модел предодређености M такав да важи:*

- $M \models \mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$;
- *сваки скуп $A \in \Delta_M$ је универзално Беров;*
- $\Delta_{\mathrm{CM}^+} \subset \Delta_M$.

За сваки такав модел M важи $\partial M \subset L(\Delta_M)$.

Dokaz. На основу теореме 16, постоји универзално Беров скуп A такав да

$$(\forall X \in \Delta_{\mathrm{CM}^+})(X <^*_{\mathrm{W}} A).$$

Теорема 14 имплицира да постоји конструктибилно затворена колекција Δ универзално Берових скупова таква да $A \in \Delta$ и $L(\Delta) \models \mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$. Дакле, модел $M = L(\Delta)$ има тражена својства.

Нека је сада M даи модел са својствима као у исказу последице. Последица 17 даје $\partial M \subseteq \mathrm{CM}^+$, па је $\Delta_{\partial M} \subset \Delta_M$. Како је $\partial M \subseteq L(\Delta_M)$, закључујемо да је ова инклузија строга. □

Претпоставка 19. *Нека је M модел предодређености који задовољава $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ и који је садржан у проширеном Чанговом моделу. Тада важи $\partial M = L(\Delta_M)$.* □

Дефиниција 20. Нека је M модел предодређености који задовољава $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$. Модел $\partial^\alpha M$ је дефинисан рекурзијом по $\alpha \in \mathrm{Ord}$ на следећи начин:

$$\partial^\alpha M = L\left(\bigcup_{\xi<\alpha} \Delta^\omega_{\partial^\xi M}, \bigcup_{\eta<\Theta^M} \eta^\omega\right)\left[\left(\mu_{\Delta_{\partial^\xi M}} : \xi < \alpha\right), \left(\mu_{\eta^\omega} : \eta < \Theta^M\right)\right].$$

□

Напомена 21. Имамо $\partial^0 M = \partial M$.

Став 22. *Нека је M модел предодређености који задовољава $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$. Низ $(\partial^\alpha M : \alpha \in \mathrm{Ord})$ је:*

- *низ модел предодређености;*
- *садржан у M;*
- *константан почев од неког индекса $\alpha_0 < \Theta^M$.* □

Дефиниција 23. Нека је M модел предодређености који задовољава $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$. Тада $\partial^\infty M$ означава модел $\partial^\alpha M$ за $\alpha = \Theta^M$. □

Теорема 24 (Касум, Саргсјан). *Нека је M модел предодређености који задовољава $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$ такав да* ***не*** *постоји конструктибилно затворена колекција $\Gamma \subset \Delta_M$ таква да $L(\Gamma) \models \mathrm{AD}_{\mathbb{R}} + \mathrm{cof}(\Theta) = \Theta$. Тада је $\partial^\infty M = M$.* □

Теорема 25 (Саргсјан). *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала и да постоји Вудинов кардинал који је лимес Вудинових кардинала. Тада постоји $\subseteq$-најмањи модел предодређености који задовољава* $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}} + \mathrm{cof}(\Theta) = \Theta$. □

Став 26. *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала који су лимеси Вудинових кардинала. Нека је M произвољан модел предодређености. Тада важи* $\partial^\infty M \subseteq \mathrm{CM}^+$. □

Последица 27. *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала који су лимеси Вудинових кардинала. Тада најмањи модел за $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}} + \mathrm{cof}(\Theta) = \Theta$ постоји и садржан је у проширеном Чанговом моделу.*

Dokaz. На основу теореме 25, постоји $\subseteq$-најмањи модел предодређености; означимо га са M. На основу теореме 24 и става 26, имамо

$$M = \partial^\infty M \subseteq \mathrm{CM}^+.$$

□

Теорема 28 (Касум, Саргсјан). *Нека је M модел предодређености који задовољава $\mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$. Ако је $\partial^\infty M \subset M$, онда постоји ход-пар (P, Σ) у M такав да $P \vDash$„постоји мерљив лимес Вудинових кардинала“.* □

Последица 29. *Претпоставимо да постоји неограничено много Вудинових кардинала који су лимеси Вудинових кардинала. Тада постоји ход-пар (P, Σ) такав да:*

- *$P \vDash$„постоји мерљив лимес Вудинових кардинала“;*
- *итерациона стратегија Σ је кодирана универзално Беровим скупом.*

Dokaz. На основу последице 18 постоји модел детериминисаности M такав да је:

а) $M \vDash \mathrm{AD}_{\mathbb{R}}$;

б) сваки скуп реалних бројева у M је универзално Беров;

в) $\Delta_{\mathrm{CM}^+} \subset \Delta_M$.

На основу става 26, $\Delta_{\partial^\infty M} \subseteq \Delta_{\mathrm{CM}^+} \subset \Delta_M$, одакле $\partial^\infty M \subset M$. Теореме 28 имплицира да постоји ход-пар (P, Σ) у M такав да $P \vDash$„постоји мерљив лимес Вудинових кардинала“. Ово је довољно за закључак јер је сваки скуп у $\mathscr{P}(\mathbb{I}) \cap M$ универзално Беров. □