

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
У БЕОГРАДУ

СЕМИНАРСКИ РАД
ОРДИНАЛИ И ОРДИНАЛНА АРИТМЕТИКА

супервизор:
Матеј Милићевић

студент:
Обрад Касум

БЕОГРАД, 2017.

Садржај

1	Пролог	1
2	Ординали	1
3	Добра уређења	4
4	Ординална аритметика	5
5	Епилог	9

1 Пролог

У овом раду ћемо радећи унутар теорије $ZF^- - \text{Inf}^1$ увести основне појмове и доказати елементарна тврђења у вези са ординалима. Ово је могуће учинити и у слабијој теорији (видети на пример [1]), али нам то овде није од значаја. Наводимо најпре неке помоћне појмове и нека њихова својства.

Дефиниција 1.1 *Скуп је транзитиван ако је сваки његов елемент уједно и његов подскуп.*

Дефиниција 1.2 $S(x) = x \cup \{x\}$.

Јасно је да важи $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$. Следећи став се доказује непосредно.

Став 1.1

1. Ако су елементи скупа $X \neq \emptyset$ транзитивни скупови, онда су и $\bigcup X$ и $\bigcap X$ транзитивни.
2. Ако је x транзитиван, онда је и $S(x)$ транзитиван.

Дефиниција 1.3 *Парцијално уређење R скупа A је добро ако сваки непразан подскуп скупа A садржи R -минимум.*

Свако добро уређење је линеарно: елементи x и y су упоредиви јер $\{x, y\}$ садржи најмањи елемент. Јасно је да је уређење изоморфно добром уређењу такође добро.

2 Ординали

Дефиниција 2.1 *Ординал је транзитиван скуп добро уређен релацијом $\in$. Класа свих ординала се означава са ON .*

За означавање ординала се уобичајено користе мала грчка слова ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \eta, \xi, \dots$). У овом смислу, реченица облика $\forall \alpha \phi(\alpha)$ има значење $\forall x (x \in ON \Rightarrow \phi(x))$, и слично.

Став 2.1 *За сваки ординал α важи $\alpha \notin \alpha$.*

Доказ. Ако би било $\alpha \in \alpha$, онда би α био елемент ординала који је мањи од самог себе у релацији поретка $\in$, што није могуће. $\square$

Став 2.2 *Сваки елемент ординала је ординал. Другим речима, класа ON је транзитивна.*

Доказ. Нека је α дати ординал и $x \in \alpha$. Из транзитивности α следи да је $x \subseteq \alpha$, па је x добро уређен релацијом $\in$. Докажимо још да је x транзитиван. Нека је $y \in x$ произвољан. Тада је $y \in \alpha$, па за свако $z \in y$ важи $z \in \alpha$ и $z \in y \in x$, одакле је $z \in x$ јер је $\in$ поредак на α . Дакле, $y \subseteq x$. $\square$

У предходном тврђењу смо показали да $\alpha \in ON \Rightarrow \alpha \subseteq ON$. Обратно важи уз додатни услов да је α транзитиван. Ово ћемо показати у ставу 2.6.

Став 2.3 *За ординале α и β је $\alpha \subseteq \beta$ акко $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$.*

Доказ. Импликација ($\Leftarrow$) следи из транзитивности ординала. Докажимо ($\Rightarrow$). Претпоставимо да је $\alpha \neq \beta$. Тада је $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$, па садржи $\in$ -минимум γ . Сада ако $x \in \gamma$, важи $x \in \beta$ (јер $\gamma \in \beta$) и $x \notin \beta \setminus \alpha$ (јер је γ $\in$ -минималан), па је $x \in \alpha$, тј. $\gamma \subseteq \alpha$. С друге стране, ако $x \in \alpha$, онда је по претпоставци $x \in \beta$, па су x и γ $\in$ -упоредиви. Ако би било $\gamma \in x$ или $\gamma = x$, онда би важило $\gamma \in \alpha$ (јер $x \in \gamma$), што је нетачно по дефиницији γ . Закључујемо да је $x \in \gamma$. Сада имамо и $\alpha \subseteq \gamma$, па је $\alpha = \gamma \in \beta$. $\square$

¹Ова теорија се састоји од аксиома празног скупа, екстензионалности, пара, уније, партитивног скупа и схема сепарације и замене; дакле, од ZF аксиома нису укључене само аксиоме бесконачности и добре заснованости.

Теорема 2.4 Класа ON је добро уређена релацијом $\in$. Другим речима, важи:

1. $\in$ је ирефлексивна на ординалима, тј. $\forall \alpha (\alpha \notin \alpha)$;
2. $\in$ је транзитивна на ординалима, тј. $\forall \alpha \beta \gamma (\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma)$;
3. сваки непразан подскуп класе ON садржи $\in$ -минимум.

Доказ.

1. Следи из става 2.1.
2. Следи из транзитивности ординала.
3. Ако је $x \subseteq ON$ непразан скуп, нека је $\alpha \in x$ произвољно. Ако је $\alpha \cap x = \emptyset$, онда је $\alpha = \min_{\in} x$; иначе $\min_{\in} x = \min_{(\alpha, \in)} (\alpha \cap x)$.

□

Када радимо са ординалима, уместо $\in$ користимо и ознаку $<$. Њој одговарајућа релација $\leq$ је $\subseteq$ (став 2.3).

Став 2.5 ON је права класа, тј. не постоји скуп свих ординала.

Доказ. Претпоставимо да је ON скуп. Тада је на основу става 2.2 и теореме 2.4 ON ординал. Сада је $ON \in ON$, што је у контрадикцији са ставом 2.1. □

Став 2.6 Транзитиван скуп ординала је ординал.

Доказ. Скуп $x \subseteq ON$ је добро уређен релацијом $\in$ на основу теореме 2.4, па ако је још и транзитиван, он је по дефиницији ординал. □

Став 2.7

1. Ако је X скуп ординала, онда је $\bigcup X$ ординал и важи $\bigcup X = \sup X$.
2. Ако је X непразна класа ординала, онда је $\bigcap X$ ординал и важи $\bigcap X = \min X$.

Доказ.

1. $\bigcup X$ је подскуп класе ON , који је транзитиван на основу става 1.1, па је он ординал на основу 2.6. За $\alpha \in X$ је $\alpha \subseteq \bigcup X$, па је $\bigcup X$ мајоранта за X . С друге стране, ако је β мајоранта скупа X , онда је $\beta \supseteq \xi$ за све $\xi \in X$, па је $\beta \supseteq \bigcup_{\xi \in X} \xi = \bigcup X$. Овим је доказано да је $\bigcup X = \sup X$.
2. $\bigcap X$ је скуп ординала који је транзитиван према ставу 1.1, па је он ординал. Остатак следи ако докажемо да X има минимум. Нека је $\alpha \in X$ произвољан. Ако је $\alpha \cap X$ празан, онда је α тражени минимум. Иначе, тражени минимум је $\min(\alpha \cap X)$, који постоји на основу теореме 2.4.

□

Последица предходног става је следећа теорема која представља значајну технику за доказивање тврђења за ординале. Она се обично назива *трансфинитна индукција*.

Теорема 2.8 Свака непразна поткласа класе ON има најмањи елемент.

Ово тврђење се може формулисати и у следећем облику. Ако је P својство које могу имати ординали и ако важи

$$(\forall \xi < \alpha) P(\xi) \Rightarrow P(\alpha)$$

за све α , онда P важи за све ординале. Ово важи јер би минимум класе $\{\alpha \in ON : \neg P(\alpha)\}$ очигледно довео до контрадикције, па по предходној теореме та класа мора бити празна.

Став 2.9 Ако је α ординал, онда је и $S(\alpha)$ ординал. Важи $\alpha < S(\alpha)$ и $\forall \gamma[\gamma \leq \alpha \Leftrightarrow \gamma < S(\alpha)]$.

Доказ. $S(\alpha)$ је транзитиван према ставу 1.1 и важи $S(\alpha) \subseteq \text{ON}$, па је он ординал. Остатак следи непосредно. $\square$

$S(\alpha)$ је *следбеник* ординала α . Све ненула ординале делимо на оне који су следбеници неког ординала и на оне који то нису.

Дефиниција 2.2

1. Ординал α је *следбеник* ако је $\alpha = S(\beta)$ за неко β .
2. Ординал је *гранични* ако није нула и није следбеник.
3. Ординал α је *природан број* ако су сви $\beta \leq \alpha$ нула или следбеник.

$0 = \emptyset$ је најмањи ординал и природан број. $1 = S(0) = \{0\}$, $2 = S(1) = \{0, 1\}$, $3 = S(2) = \{0, 1, 2\}$ су природни бројеви и самим тим следбеници. Постојање граничног ординала је еквивалентно аксиоми бесконачности.

Дефиниција 2.3 $\omega = \{n : n \text{ је природан број}\}$

Као у предходној дефиницији, за означавање природних бројева обично користимо мала латинична слова $m, n, p, \dots$. Класа ω свих природних бројева може бити права класа. Касније ћемо показати да је тврђење да је ω скуп еквивалентно аксиоми бесконачности.

Став 2.10 Ако је n природан број, онда је и $S(n)$ природан број и сви $\alpha < n$ су природни бројеви.

Доказ. За све $\beta \leq S(n)$ је $\beta \leq n$ или $\beta = S(n)$. Пошто је n природан број, овакав β мора бити нула или следбеник. Ако је $\alpha < n$, онда за све $\beta \leq \alpha$ важи $\beta < n$, па овакав β мора бити нула или следбеник јер је $n \in \omega$. $\square$

Теорема 2.11 Седећи искази су еквивалентни.

1. Постоји гранични ординал.
2. ω је скуп.

Доказ.

- (1 $\Rightarrow$ 2) Нека је λ најмањи гранични ординал. Тада су сви ординали мањи од λ природни бројеви (јер испод λ нема граничних ординала), а ниједан природан број не може бити већи од λ (јер је λ граничан), па је $\lambda = \omega$.
- (2 $\Rightarrow$ 1) Ако је ω скуп онда је, према предходном ставу, он транзитиван скуп ординала, па је и сам ординал. $\omega > 0$ и $S(n) < \omega$ за све $n < \omega$ (предходни став), па је ω гранични ординал. $\square$

Дакле, тврђење да је ω скуп је еквивалентно аксиоми бесконачности. Из доказа предходне теореме непосредно следи следеће тврђење.

Теорема 2.12 Ако важи аксиома бесконачности, ω је најмањи гранични ординал.

Касније ћемо показати да из аксиоме бесконачности следи да за сваки ординал постоји већи гранични ординал (теорема 4.5).

Став 2.13

1. $\alpha = S(\beta)$ ако β је $\in$ -максималан у α .
2. За слобеник α важи $\alpha = S(\bigcup \alpha)$.
3. За гранични α важи $\alpha = \bigcup \alpha$.
4. За све α важи $\bigcup \alpha \leq \alpha \leq S(\bigcup \alpha)$.

Доказ.

1. Непосредно се проверава.
2. Ако је $\alpha = S(\beta)$, онда из 1. следи $\bigcup \alpha = \sup \alpha = \beta$.
3. Ако је α граничан, онда из 1. следи да за свако $\beta < \alpha$, постоји $\gamma < \alpha$ за које важи $\beta < \gamma$. Сада је јасно да је $\alpha = \bigcup \alpha$.
4. Следи из 2. и 3.

□

Дајемо следећу формулацију метода индукције која се врло често користи у пракси. Нека је P својство које могу имати ординали. Ако важи:

1. $P(0)$;
2. $P(\alpha) \Rightarrow P(S(\alpha))$;
3. $(\forall \beta < \gamma) P(\beta) \Rightarrow P(\gamma)$ за граничне γ ;

онда је $P(\alpha)$ за све ординале α .

3 Добра уређења

У овом одељку ћемо показати да је свако добро уређење изоморфно тачно једном ординалу. Другим речима, ординалима је одређена канонска репрезентација добрих уређења.

Став 3.1 Ако је $f : \alpha \rightarrow \beta$ изоморфизам уређења $\langle \alpha, < \rangle$ и $\langle \beta, < \rangle$, онда је f идентичко пресликавање и $\alpha = \beta$.

Доказ. Довољно је доказати да је $f = \text{id}_\alpha$. Претпоставимо супротно. Тада је $\{\xi < \alpha : f(\xi) \neq \xi\} \neq \emptyset$. Нека је γ његов минимум. Тада $f(\xi) = \xi$ за све $\xi < \gamma$, па је $f(\gamma) > \gamma$. Сада је за неко $\delta < \alpha$ $f(\delta) = \gamma < f(\gamma)$, одакле следи да је $\delta < \gamma$, па је $f(\delta) = \delta$, што је контрадикција јер је лева страна једнака γ , а десна строго мања од γ . □

Дакле, изоморфни ординали су једнаки, а једини аутоморфизам неког ординала је идентичко пресликавање. На основу овога следи и да је изоморфизам изоморфних добрих уређења јединствен.

Теорема 3.2 За свако добро уређење $\langle A, R \rangle$ постоји јединствени ординал α такав са је $\langle A, R \rangle \cong \langle \alpha, < \rangle$.

Доказ. Јединственост следи на основу предходног става. Нека је $a \downarrow = \{x \in A : xRa\}$. Тада је $a \downarrow$ добро уређен релацијом R . Нека је B скуп свих $a \in A$ таквих да је $\langle a \downarrow, R \rangle$ изоморфно неком (јединственом) ординалу ξ_a . Тада је $\alpha = \{\xi_a : a \in B\}$ транзитиван скуп ординала, па је и сам ординал. Ако би било $A \setminus B \neq \emptyset$, минимум m овог скупа би задовољавао $m \downarrow = B$, па би важило $\langle m \downarrow, R \rangle \cong \langle \alpha, < \rangle$, односно $m \in B$, што је контрадикција. Дакле, $A = B$ и $\langle A, R \rangle \cong \langle \alpha, < \rangle$. □

Дефиниција 3.1 Јединствен ординал изоморфан добром уређењу $\langle A, R \rangle$ назива се типом тог уређења и означава се са $\text{type}(A, R)$ или $\text{type}(A)$.

Став 3.3 Ако је A добро уређен релацијом R и $X \subseteq A$, онда је и X добро уређен релацијом R и важи $\text{type}(X) \leq \text{type}(A)$.

Доказ. Довољно је доказати тврђење за $A = \alpha \in \text{ON}$ и $R = \in$. Јасно је да R добро уређује X . Нека је $f : X \rightarrow \beta$ изоморфизам уређења. Претпоставимо $f(\xi) > \xi$ за неко $\xi \in X$. Нека је ξ најмањи такво. Тада је за све $\eta < \xi$ задовољено $f(\eta) \leq \eta < \xi < f(\xi)$, односно $\xi \in \beta \setminus f[X]$, што је контрадикција. Дакле, важи $f(\xi) \leq \xi$ за све $\xi \in X$. Сада је јасно да је $\beta \leq \alpha$. $\square$

4 Ординална аритметика

За два ординала α и β скупови $\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$ и $\beta \times \alpha$ су добро уређени лексикографским поретком. Даље, нека је $F(\alpha, \beta)$ скуп свих пресликавања $f : \beta \rightarrow \alpha$ за која је скуп $\{\xi < \beta : f(\xi) \neq 0\}$ коначан². Нека је $f \triangleleft g$ за $f, g \in F(\alpha, \beta)$ ако је $f(\xi) < g(\xi)$ за највећи $\xi < \beta$ за који је $f(\xi) \neq g(\xi)$. Лако се показује да је $\triangleleft$ добро уређење скупа $F(\alpha, \beta)$. Сада можемо да дефинишемо операције ординалне аритметике.

Дефиниција 4.1

1. $\alpha + \beta = \text{type}(\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta)$;
2. $\alpha \cdot \beta = \text{type}(\beta \times \alpha)$;
3. $\alpha^\beta = \text{type}(F(\alpha, \beta), \triangleleft)$.

Следећа теорема описује како се ове релације рачунају рекурзивно. У овом раду нисмо доказивали теорему о рекурзији за класу ON , али када је она доказана, наредно тврђење може да послужи као дефиниција ординалних операција. Такође, рекурзивна карактеризација операција нам омогућава да тврђења о њима лакше доказујемо индукцијом.

Теорема 4.1

1. $\alpha + 0 = \alpha$; $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$; $\alpha + \gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \alpha + \beta$ (за граничан γ).
2. $\alpha \cdot 0 = 0$; $\alpha \cdot S(\beta) = \alpha \cdot \beta + \alpha$; $\alpha \cdot \gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \alpha \cdot \beta$ (за граничан γ).
3. $\alpha^0 = 1$; $\alpha^{S(\beta)} = \alpha^\beta \cdot \alpha$; $\alpha^\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \alpha^\beta$ (за граничан γ).

Доказ. Доказаћемо само 1. јер се остали слично доказују. $\alpha + 0 = \alpha$ је јасно. Нека је $f : \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta \rightarrow \alpha + \beta$ изоморфизам. Тада је са

$$g(i, \xi) = \begin{cases} f(i, \xi), & (i = 0 \wedge \xi < \alpha) \vee (i = 1 \wedge \xi < \beta) \\ \alpha + \beta, & i = 1 \wedge \xi = \beta \end{cases}$$

дефинисан изомрфизам $g : \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times S(\beta) \rightarrow S(\alpha + \beta)$, што значи да је $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$. Ако је γ граничан и $f_\beta : \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta \rightarrow \alpha + \beta$ изоморфизам за $\beta < \gamma$, онда је $f_{\beta_2} \upharpoonright (\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta_1) = f_{\beta_1}$ за $\beta_1 < \beta_2 < \gamma$. Сада је са $f = \bigcup_{\beta < \gamma} f_\beta$ коректно дефинисан изомрфизам између $\{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \gamma$ и $\bigcup_{\beta < \gamma} \alpha + \beta$, односно $\alpha + \gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \alpha + \beta$. $\square$

Специјално из предходне теореме следи да је $\alpha + 1 = S(\alpha)$, $\alpha \cdot 1 = \alpha$ и $\alpha^1 = \alpha$. Тачка 3. у предходној теорему важи ако је $\alpha \neq 0$. Иначе је $0^0 = 1$, а $0^\beta = 0$ за $\beta > 0$; предходни рекурзиви рачун би дао $0^\beta = 1$ за $\beta = 0$ и β граничан, а $0^\beta = 0$ у противном.

²Скуп x је коначан ако постоји природан број n и бијекција $f : x \rightarrow n$. Може се показати да је ординал коначан акко је природан број. Коначношћу се овде нећемо детаљније бавити, али претпостављамо основне осбине као познате. Видети још и епilog.

Став 4.2 Нека су α и β_i ($i \in I \neq \emptyset$) ординали. Тада важи:

$$\bigcup_{i \in I} (\alpha + \beta_i) = \alpha + \bigcup_{i \in I} \beta_i, \quad \bigcup_{i \in I} (\alpha \cdot \beta_i) = \alpha \cdot \bigcup_{i \in I} \beta_i, \quad \bigcup_{i \in I} (\alpha^{\beta_i}) = \alpha^{\bigcup_{i \in I} \beta_i}.$$

Доказ. Докажимо само прву једнакост, остале се доказују слично. Нека постоји β_{i_0} максималан међу β_i . Тада је $\alpha + \beta_{i_0}$ маскималан међу ординалима $\alpha + \beta_i$ и важи

$$\bigcup_{i \in I} (\alpha + \beta_i) = \alpha + \beta_{i_0} = \alpha + \bigcup_{i \in I} \beta_i.$$

У противном, ако међу β_i нема максималног, $\bigcup_{i \in I} \beta_i$ је граничан и важи

$$\alpha + \bigcup_{i \in I} \beta_i = \bigcup_{\xi < \bigcup_{i \in I} \beta_i} (\alpha + \xi) = \bigcup_{i \in I} (\alpha + \beta_i).$$

Последња једнакост следи из чињенице да је $\xi < \bigcup_{i \in I} \beta_i$ акко је $\xi < \beta_i$ за неко $i \in I$, као и својства монотоности сабирања по другом сабирку, које непосредно следи из дефиниције. $\square$

Предходни став говори о *непрекидности* ординалних операција по другој променљивој. Операције нису³ непрекидне по првој променљивој, што показују следећи примери:

$$\begin{aligned} \bigcup_{n < \omega} (n + 2) &= \omega < \omega + 2 = (\bigcup_{n < \omega} n) + 2; \\ \bigcup_{n < \omega} (n \cdot 2) &= \omega < \omega \cdot 2 = (\bigcup_{n < \omega} n) \cdot 2; \\ \bigcup_{n < \omega} (n^2) &= \omega < \omega^2 = (\bigcup_{n < \omega} n)^2. \end{aligned}$$

Следећи став говори о већ коришћеној монотоности аритметичких операција по другој променљивој и доказује се непосредно из дефиниције.

Став 4.3

1. $\beta_1 < \beta_2 \Rightarrow \alpha + \beta_1 < \alpha + \beta_2$;
2. $\beta_1 < \beta_2 \wedge \alpha > 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2$;
3. $\beta_1 < \beta_2 \wedge \alpha > 1 \Rightarrow \alpha^{\beta_1} < \alpha^{\beta_2}$.

Када је у питању монотоност по првој променљивој важи следећи, нешто слабији, став.

Став 4.4

1. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 + \beta \leq \alpha_2 + \beta$;
2. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \beta \leq \alpha_2 \cdot \beta$;
3. $\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1^\beta \leq \alpha_2^\beta$.

Доказ. Тврђење следи непосредно из дефиниције. На пример, у првом случају је $\{0\} \times \alpha_1 \cup \{1\} \times \beta \subseteq \{0\} \times \alpha_2 \cup \{1\} \times \beta$, одакле следи одговарајућа неједнакост. $\square$

Пример $\alpha_1 = 2 < 3 = \alpha_2$ и $\beta = \omega$ показује да овде не важи строга монотоност:

$$\omega = 2 + \omega = 3 + \omega = 2 \cdot \omega = 3 \cdot \omega = 2^\omega = 3^\omega.$$

³Контра-примери у овом одељку подразумевају аксиому бесконачности. Ако ω не постоји, сви ординали су природни бројеви и одговарајућа тврђења важе.

Теорема 4.5 *Ако важи аксиома бесконачности, гранични ординали су кофинални у ON, тј. за свако α постоји гранични ординал већи од α .*

Доказ. На основу ставова 4.2 и 4.3 $\alpha + \omega$ је гранични ординал већи од α . □

Наведимо сада основна алгебарска својства аритметичких операција.

Став 4.6

1. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma); \quad (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma);$
2. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma;$
3. $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma; \quad \alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma;$
4. $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha; \quad \alpha + 1 = S(\alpha);$
5. $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0; \quad \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha;$
6. $\alpha^0 = 1; \quad \alpha^1 = \alpha; \quad \alpha > 0 \Rightarrow 0^\alpha = 0; \quad 1^\alpha = 1;$
7. $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma; \quad \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \wedge \alpha > 0 \Rightarrow \beta = \gamma.$

Доказ. Тачке 4, 5. и 6. следе непосредно из дефиниције, а 7. из става 4.3. Доказаћемо тачку 2, тачке 1. и 3. се доказују слично. Фиксирајмо α и β . Тврђење тривијално важи за $\alpha = 0$, тако да можемо претпоставити да је $\alpha > 0$. Доказ изводимо индукцијом по γ .

- За $\gamma = 0$ тврђење тривијално важи.
- Претпоставимо да тврђење важи за γ и докажимо га за $S(\gamma)$. На основу теореме 4.1, индуктивне претпоставке и тачке 1. важи:

$$\alpha \cdot (\beta + S(\gamma)) = \alpha \cdot S(\beta + \gamma) = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha = (\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma) + \alpha = \alpha \cdot \beta + (\alpha \cdot \gamma + \alpha) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot S(\gamma).$$

- Претпоставимо да је γ граничан и да тврђење важи за све $\delta < \gamma$. Тада су $\beta + \gamma$ и $\alpha \cdot \gamma$ такође гранични и на основу индуктивне претпоставке, теореме 4.1 и ставова 4.2 и 4.3 важи:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \bigcup_{\xi < \beta + \gamma} \alpha \cdot \xi = \bigcup_{\xi < \bigcup_{\delta < \gamma} \beta + \delta} \alpha \cdot \xi = \bigcup_{\delta < \gamma} \alpha \cdot (\beta + \delta) = \bigcup_{\delta < \gamma} \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \delta = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma.$$

Дакле, тврђење важи и за γ . □

Комутативност сабирања и множења, као и десна дистрибутивност множења према сабирању не важе, што показују следеће неједнакости:

$$1 + \omega = \omega < \omega + 1; \quad 2 \cdot \omega = \omega < \omega + \omega = \omega \cdot 2; \quad (3 + 4) \cdot \omega = \omega < \omega + \omega = 3 \cdot \omega + 4 \cdot \omega.$$

Такође, за разлику од леве регуларности (тачка 7), десна регларност не важи, што се види из следећих једнакости:

$$1 + \omega = 2 + \omega = 1 \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega.$$

Став 4.7 *Ако је $\alpha \leq \beta$, онда постоји јединствени γ такав да је $\beta = \alpha + \gamma$.*

Доказ. Јединственост следи из тачке 7. предходног става. За егзистенцију је довољно приметити да $\gamma = \text{type}(\beta \setminus \alpha)$ задовољава тражену једнакост. □

Предходни став оправдава следећу дефиницију.

Дефиниција 4.2 Ако је $\alpha \leq \beta$, разлика ординала β и α је јединствени ординал γ такав да је $\beta = \alpha + \gamma$. Ову разлику означићемо са $\beta - \alpha$.

Следећи став говори о дељењу са остатком.

Став 4.8 Ако су $\alpha > 0$ и β ординали, онда постоје јединствени γ и δ такви да је

$$\beta = \alpha \cdot \gamma + \delta, \quad \delta < \alpha.$$

Доказ. Јединственост следи непосредно из строге монотоности аритметичких операција по другој променљивој. Докажимо екзистенцију. Скуп $\{\xi : \alpha \cdot \xi \leq \beta\}$ је непразан, па његов супремум γ , због непрекидности, такође задовољава $\alpha \cdot \gamma \leq \beta$. Сада је дефинисано и $\delta = \beta - \alpha \cdot \gamma$. Овако одређени γ и δ задовољавају тражене услове. $\square$

Став 4.9 Ако су $\alpha > 1$ и $\beta > 0$ ординали, онда постоје јединствени γ , δ и ξ такви да је

$$\beta = \alpha^\gamma \cdot \delta + \xi, \quad 0 < \delta < \alpha, \quad \xi < \alpha^\gamma.$$

Доказ. Јединственост следи из монотоности аритметичких операција. Докажимо екзистенцију. Скуп $\{\eta : \alpha^\eta \leq \beta\}$ је непразан, па његов супремум γ , због непрекидности, задовољава $\alpha^\gamma \leq \beta$. Ако поделимо β са α^γ са остатком, добијамо

$$\beta = \alpha^\gamma \cdot \delta + \xi, \quad \xi < \alpha^\gamma.$$

Због дефиниције γ мора бити и $0 < \delta < \alpha$. $\square$

У предходном ставу, ако су $\alpha, \beta \in \omega$, имамо следеће формуле:

$$\gamma = \lfloor \log_\alpha \beta \rfloor, \quad \delta = \lfloor \beta / \alpha^\gamma \rfloor, \quad \xi = \beta - \alpha^\gamma \cdot \delta.$$

Уведимо сада продужене суме и производе ординала. Нека су α_ξ ($\xi < \beta$) произвољни ординали. Скуп $\bigcup_{\xi < \beta} \{\xi\} \times \alpha_\xi$ је добро уређен лексикографским поретком. Нека је $\prod_{\xi < \beta}^* \alpha_\xi$ скуп сви пресликавања $f : \beta \rightarrow \bigcup_{\xi < \beta} \alpha_\xi$ таквих да је $f(\xi) \in \alpha_\xi$ за све $\xi < \beta$ и да је скуп $\{\xi < \beta : f(\xi) \neq 0\}$ коначан. Ако је $f(\xi) < g(\xi)$ за највећи $\xi < \beta$ за који се функције $f, g \in \prod_{\xi < \beta}^* \alpha_\xi$ разликују, онда кажемо да је f мање од g и пишемо $f \triangleleft g$. Лако се показује да је $\triangleleft$ добро уређење на $\prod_{\xi < \beta}^* \alpha_\xi$.

Дефиниција 4.3

1. $\sum_{\xi < \beta} \alpha_\xi = \text{type}(\bigcup_{\xi < \beta} \{\xi\} \times \alpha_\xi);$
2. $\prod_{\xi < \beta} \alpha_\xi = \text{type}(\prod_{\xi < \beta}^* \alpha_\xi, \triangleleft).$

Непосредно следи да је $\sum_{\xi < 2} \alpha_\xi = \alpha_0 + \alpha_1$ и $\prod_{\xi < 2} \alpha_\xi = \alpha_0 \cdot \alpha_1$, као и $\sum_{\xi < \beta} \alpha = \alpha \cdot \beta$ и $\prod_{\xi < \beta} \alpha = \alpha^\beta$. Следећи став се односи на рекурзивно рачунање продужених сума и производа и доказује се слично теорему 4.1.

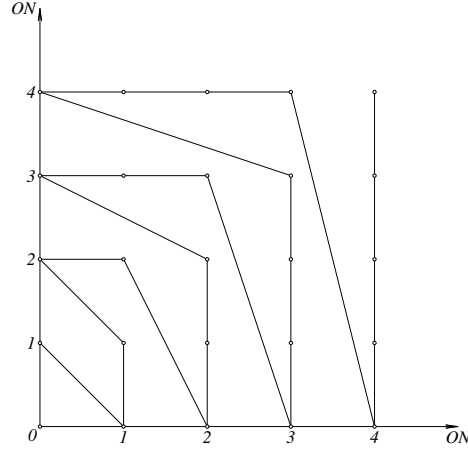
Став 4.10

1. $\sum_{\xi < 0} \alpha_\xi = 0, \quad \sum_{\xi < \beta+1} \alpha_\xi = \sum_{\xi < \beta} \alpha_\xi + \alpha_\beta, \quad \sum_{\xi < \gamma} \alpha_\xi = \bigcup_{\beta < \gamma} \sum_{\xi < \beta} \alpha_\xi$ (за граничан γ);
2. $\prod_{\xi < 0} \alpha_\xi = 1, \quad \prod_{\xi < \beta+1} \alpha_\xi = \prod_{\xi < \beta} \alpha_\xi \cdot \alpha_\beta, \quad \prod_{\xi < \gamma} \alpha_\xi = \bigcup_{\beta < \gamma} \prod_{\xi < \beta} \alpha_\xi$ (за граничан γ).

Слично напмени код рекурзивног рачунања степеновања, тачка 2. педходног става важи за $\alpha_\xi > 0$. Помоћу појмова уведених у овом одељку можемо дефинисати пресликавања $\Gamma : \text{ON} \times \text{ON} \rightarrow \text{ON}$ на следећи начин:

$$\Gamma(\alpha, \beta) = \begin{cases} \sum_{\xi < \beta} (\xi \cdot 2 + 1) + \alpha, & \alpha < \beta \\ \sum_{\xi < \alpha} (\xi \cdot 2 + 1) + \alpha + \beta & \alpha \geq \beta \end{cases}.$$

Није тешко показати да је Γ бијекција (видети на пример [3]). Дакле, Γ дефинише добро уређење на $\text{ON} \times \text{ON}$ чији је тип ON . Овде наводимо Γ чисто као куриозитет. На слици 1 је графички приказано како Γ уређује парове неких мањих ординала.



Слика 1: Функција Γ

5 Епилог

Истакнимо два значајна места на којима ординали играју битну улогу. Јасно је да ординали представљају уопштење природних бројева као редних (ординалних) бројева. Међутим, они се могу искористити и за уопштење природних бројева као кардиналних бројева. Међу скуповима можемо дефинисати релацију истобројности $\sim$ на следећи природан начин: $X \sim Y$ акко постоји бијекција $f : X \rightarrow Y$. Непосредно се проверава да је ово релација еквиваленције. Погледајмо најпре како се она понаша на ординалима. Коначни ординал (тј. онај који је мањи од ω) је истобројан само са самим собом. Код бесконачних⁴ ординала ово није случај; на пример, није тешко показати да је $\omega \sim \omega + 1$. Међутим, може се показати да за свако α постоји $\beta > \alpha$ такво да је $\beta \not\sim \alpha$; ако је β најмањи такав, онда су сви ординали из скупа $[\alpha, \beta)$ истобројни. Дакле, ординале можемо поделити на следећи начин:

$$\text{ON} = \bigcup_{n < \omega} \{n\} \cup \bigcup_{\xi \in \text{ON}} [\omega_\xi, \omega_{\xi+1}),$$

при чему су ординали у сваком издвојеном скупу истобројни и различити скупови немају истобројних елемената. Природно је сада из сваког од предходних скупова издвојити најмањи елемент и назвати га *кардиналним бројем* или *кардиналом*; он представља број елемената сваког од ординала (и сваког скупа) из своје класе еквиваленције у односу на $\sim$. Напоменимо да користимо и ознаку $\aleph_\xi = \omega_\xi$ када хоћемо да нагласимо да је у питању (бесконачни) кардинал. Ако претпоставимо још и аксиому избора, онда се сваки скуп може добро уредити, а сваки добро уређен скуп је изоморфан неком ординалу, што значи да је полазни скуп истобројан са неким ординалом. Сада је јасно да сваком скупу X можемо придружити јединствени кардинал $|X|$ који је са њим истобројан; овај кардинал је *број* елемената или *кардиналност* скупа X . Дакле, број елемената неког скупа је један од кардинала n ($n < \omega$) или $\aleph_\xi$ ($\xi \in \text{ON}$); у првом случају скуп је коначан (коначни кардинали), а у другом је бесконачан (бесконачни кардинали). Није тешко показати да је $\Gamma[\omega_\xi \times \omega_\xi] = \omega_\xi$ за све ξ , па одавде следи да је $|X \times X| = |X|$ за све бесконачне скупове X .

⁴Надаље ћемо подразумевати аксиому бесконачности.

Друго место на коме се ординали природно јављају је код *добро заснованих* релација. Оне су непосредно уопштење добрих уређења - то су релације код којих сваки непразан скуп садржи минималан елемент. Дакле, добра уређења су добро заснована линеарна уређења. Значајно је то што добро засноване релације допуштају рекурзивне дефиниције. Може се дефинисати следећа рекурзивна функција за добро засновану релацију R :

$$\text{rank}(a) = \bigcup \{\text{rank}(x) + 1 : xRa\};$$

ова функција се назива *ранг*, њене вредности су ординали и она је строго растућа. Она природно дели елементе на нивое $\text{lvl}_\alpha = \{x : \text{rank}(x) = \alpha\}$; ако је $x \in \text{lvl}_\alpha$ и $\beta < \alpha$ онда постоји $y \in \text{lvl}_\beta$ и низ $y_0 \dots y_n$ такав да је $zRy_0Ry_1R \dots y_nRx$. Напоменимо још да ако за дату релацију постоји растућа функција с вредностима у ON, та релација је добро заснована.

Претходна прича пролази и за релације над класама, при чему се мора додати још један услов, да је релација скуповног типа: за све a је $\{x : xRa\}$ скуп. Аксиома добре заснованости теорије ZF је еквивалентна тврђењу да је $\in$ добро заснована. Будући да је $\in$ тривијално скуповног типа, ако претпоставимо аксиому добре заснованости, сваком скупу је придружен његов ранг у релацији $\in$. Тада можемо дефинисати фамилију $V_\alpha = \{x : \text{rank}(x) < \alpha\}$ ($\alpha \in \text{ON}$) која задовољава $V = \bigcup_{\alpha \in \text{ON}} V_\alpha$ (V је класа свих скупова). Ова фамилија се назива *кумулятивном хијерархијом*. Она се може описати и на следећи начин, рекурзивно по индексним ординалима:

$$V_0 = \emptyset; \quad V_{\beta+1} = P(V_\beta); \quad V_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} V_\beta \quad (\text{за граничан } \gamma).$$

Литература

- [1] Кунен К. *Set Theory*, College Publications, Лондон, 2013.
- [2] Кунен К. *The Foundations of Mathematics*, College Publications, Лондон, 2009.
- [3] Перовић А, Јовановић А, Величковић Б. *Теорија скупова, математичка теорија ∞ сти*, Математички факултет, Београд, 2007.
- [4] Петровић З, Мијајловић Ж. *Математичка логика, елементи теорије скупова*, Завод за уџбенике, Београд, 2012.